Fonctions réelles

Technique obsolète

Exercice 1 [03223] [Correction]
Montrer que lorsque $x \to +\infty$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$$

Difféomorphisme

Exercice 2 [02818] [Correction]
Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

a) Trouver le plus grand intervalle ouvert I contenant 0 sur lequel f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
b) On note g l'application réciproque de $f_{\restriction I}$. Montrer que les coefficients du développement limité de g en 0 à un ordre quelconque sont positifs.

Etude de branche asymptotique

Exercice 3 [01409] [Correction]
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Montrer que f admet un point d'inflexion.
Etudier les branches infinies de la courbe représentative de f et en donner l'allure.

Exercice 4 [01408] [Correction]
Etudier la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2+x}{|x|+1}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 5 [01407] [Correction]
Etudier la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2\ln x + 3}{x}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 6 [01406] [Correction]
Etudier la fonction

$$f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 7 [01467] [Correction]
Soit

$$f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/x}$$

définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 8 [01468] [Correction]
Soit

$$f : x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$$

définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 9 [01469] [Correction]
Etudier les asymptotes de

$$x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$$

Exercice 10 [01825] [Correction]
Etudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln x}$$

Exercice 11 [01826] [Correction]
Etudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{|x-1|+x}$$

Fonctions hyperboliques inverses

Exercice 12 [01867] [Correction]
Simplifier les expressions suivantes :

a) $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x)$ b) $\mathrm{th}(\mathrm{argsh}x)$ c) $\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x)$
d) $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}x)$ e) $\mathrm{th}(\mathrm{argch}x)$ f) $\mathrm{ch}(\mathrm{argth}x)$

Exercice 13 [01868] [Correction]
Simplifier :

a) $\mathrm{argch}(2x^2-1)$ b) $\mathrm{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$

Exercice 14 [01870] [Correction]
Résoudre l'équation

$$\mathrm{argsh}x + \mathrm{argch}x = 1$$

Exercice 15 [01871] [Correction]
Soit $G : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $G(t) = \mathrm{argsh}(\tan t)$.
Montrer que G est dérivable et que pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $G'(t) = \mathrm{ch}G(t)$.

Exercice 16 [02454] [Correction]
Convergence et calcul de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 17 [02846] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}$$

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 18 [01567] [Correction]
Résoudre

$$(1+x^2)y'' + xy' - 4y = 0$$

en posant $x = \mathrm{sh}(t)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On découpe l'intégrale en deux

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt = \int_0^1 e^{t^2}\,dt + \int_1^x e^{t^2}\,dt$$

et on procède à une intégration par parties

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = \int_1^x \frac{2t}{2t}e^{t^2}\,dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$$

Ainsi

$$\int_0^x e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + C^{te}$$

Quand $x \to +\infty$, sachant que la constante est négligeable devant $e^{x^2}/2x \to +\infty$, il suffit pour conclure de montrer

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt = o\left(\int_1^x e^{t^2}\,dt\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant 1$ tel que

$$\forall t \geqslant A, \frac{1}{t^2} \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt \leqslant \int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + \varepsilon\int_A^x e^{t^2}\,dt$$

puis

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt \leqslant \int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + \varepsilon\int_1^x e^{t^2}\,dt$$

Or

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt \geqslant \int_1^x 1\,dt \geqslant x - 1 \to +\infty$$

donc pour x assez grand

$$\int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt \leqslant \varepsilon\int_1^x e^{t^2}\,dt$$

puis

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt \leqslant 2\varepsilon\int_1^x e^{t^2}\,dt$$

et on peut conclure.

Exercice 2 : [énoncé]
a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x) = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ si, et seulement si, $x \neq e - 1$.
Le plus grand intervalle cherché est $I =]-1, e-1[$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas, f réalise donc un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de I vers $]-\infty, 1/e[$.
b) On a

$$\ln(1+g(x)) = x(1+g(x))$$

En dérivant

$$g'(x) = 1 + 2g(x) + g^2(x) + xg'(x) + xg'(x)g(x)$$

En dérivant à l'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ et en évaluant en 0 on obtient

$$g^{(n+1)}(0) = 2g^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0) + ng^{(n)}(0) + n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}g^{(k+1)}(0)g^{(n-$$

On peut alors appliquer un raisonnement par récurrence forte pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) \geqslant 0$$

Ceci suffit pour conclure via la formule de Taylor-Young.

Exercice 3 : [énoncé]
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ses dérivées premières et secondes sont

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},\ f''(x) = -\frac{1}{x^3} - 2\frac{1-\ln x}{x^3} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

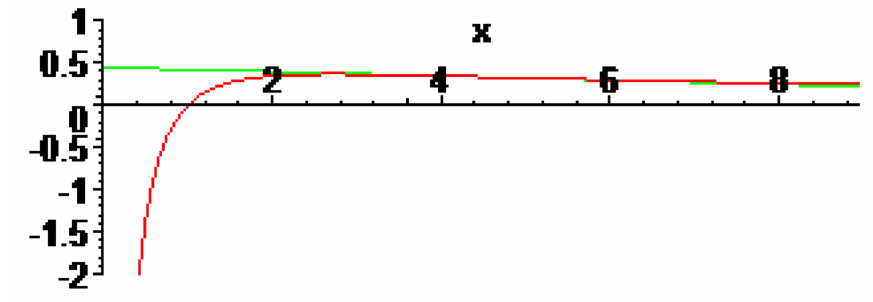
On en déduit les variations suivantes

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

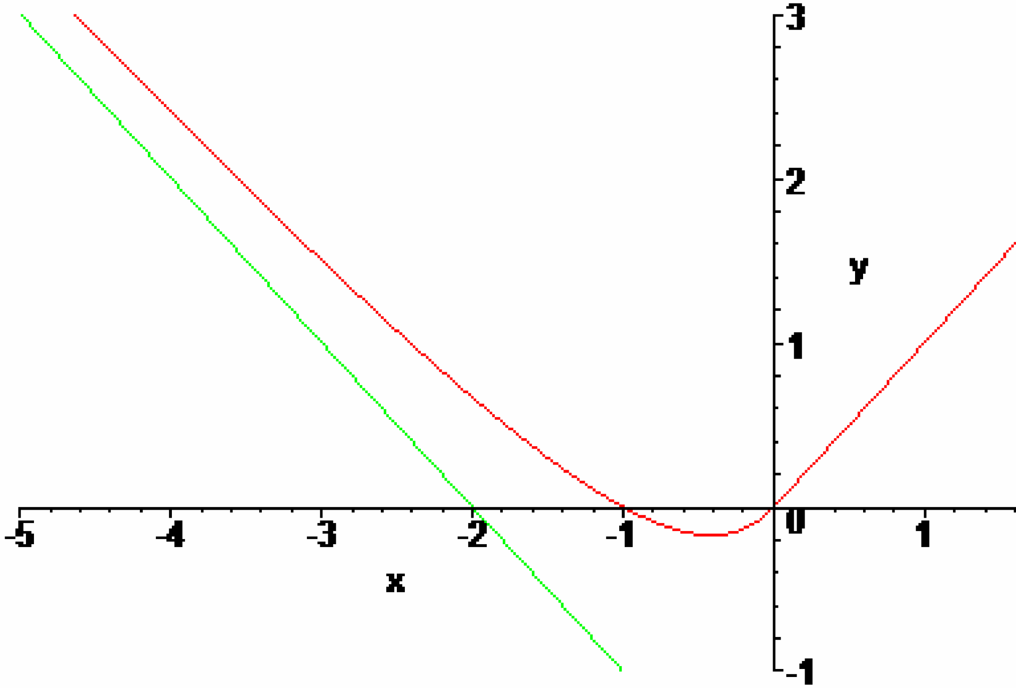
x		$e^{3/2}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

La fonction f présente un point d'inflexion en $e^{3/2}$.
Puisque $\lim_0 f = -\infty$, il y a une asymptote d'équation $x = 0$.
Puisque $\lim_{+\infty} f = 0$, il y a une asymptote d'équation $y = 0$.

```
f:=x->ln(x)/x:
a:=exp(3/2):
plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a)], x=0..2*a, y=-2..1);
```



La fonction $x \mapsto (\ln x)/x$



La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+x}{|x|+1}$

Exercice 4 : [énoncé]
f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable (par opérations) sur $\mathbb{R}^\star$.
Par limite de taux de variation on constate que f est aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.
Sur $\mathbb{R}^+$, $f(x) = x$ ce qui achève l'étude sur $\mathbb{R}^+$.
Sur $\mathbb{R}^-$,

$$f(x) = \frac{x^2+x}{1-x}$$

présente un minimum en $1-\sqrt{2}$ de valeur $2\sqrt{2}-3$ et f présente une asymptote d'équation $y = -x-2$, courbe au dessus.

```
plot([(x^2+x)/(abs(x)+1), -x-2], x=-5..2, y=-1..3);
```

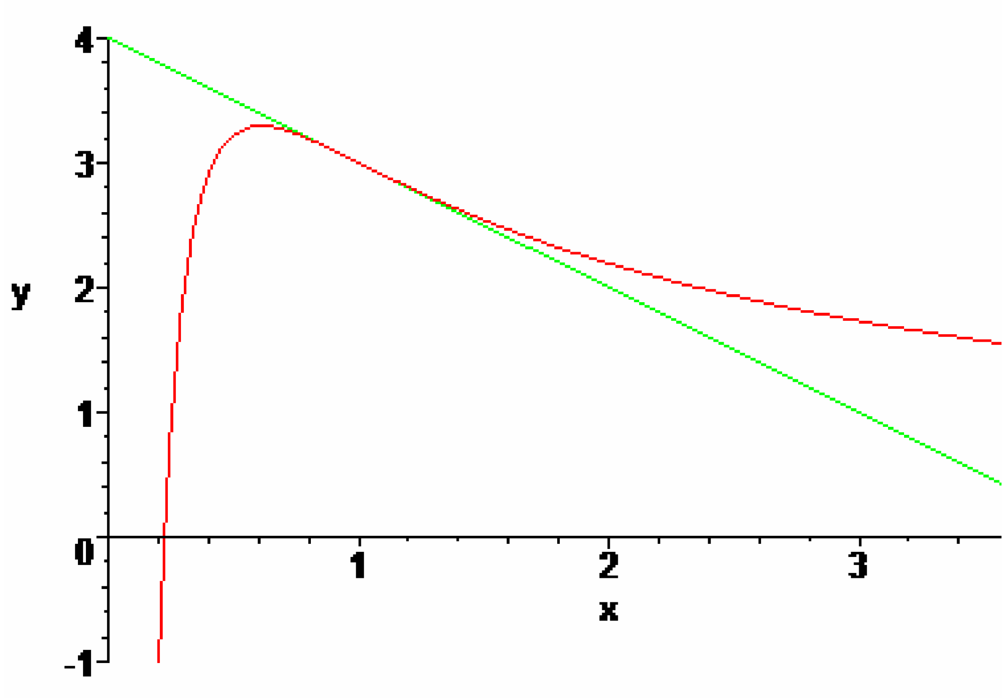
Exercice 5 : [énoncé]
f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^2} \text{ et } f''(x) = \frac{4\ln x}{x^3}$$

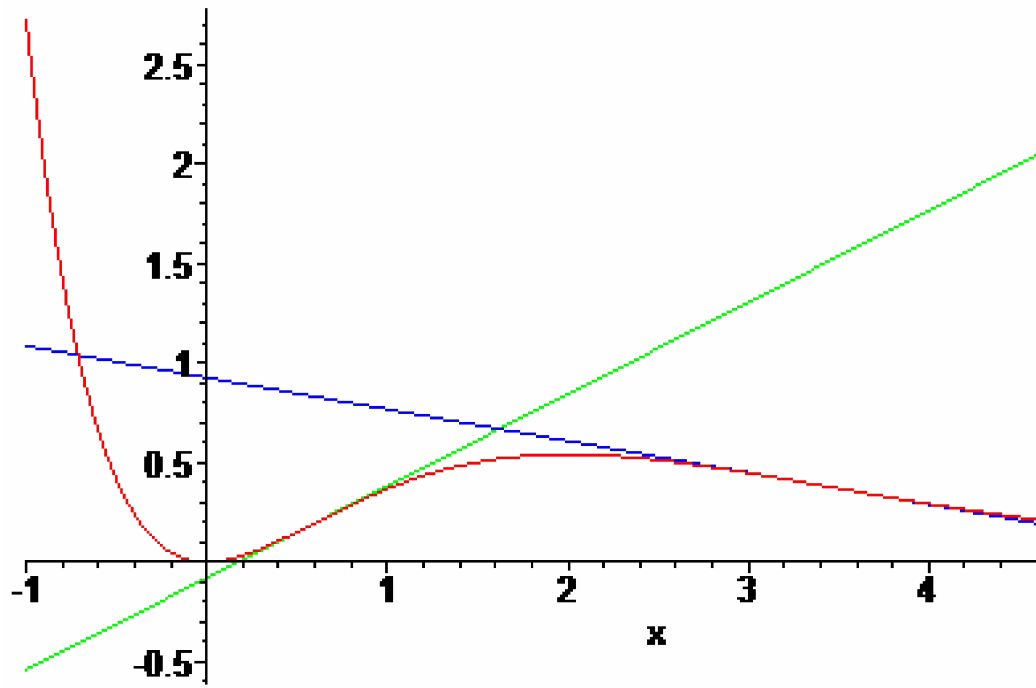
x	0		$1/\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

En 0 : (Oy) est asymptote.
En $+\infty$: (Ox) est asymptote.
En 1 : f'' s'annule avec changement de signe, point d'inflexion.
L'équation de la tangente en ce point est $y = -(x-1)+3$.

```
plot([(2*ln(x)+3)/x, -(x-1)+3], x=0..4, y=-1..4);
```



La fonction $x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$



La fonction $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 6 : [énoncé]
f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x} \text{ et } f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

f présente un minimum absolu en 0 de valeur 0 et un maximum local en 2 de valeur $4/\mathrm{e}^2$.
f présente des points d'inflexion en $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$.
f présente une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
f présente une branche parabolique verticale en $-\infty$.

```
f:=x->x^2*exp(-x):
a:=2+sqrt(2):b:=2-sqrt(2):
plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a), D(f)(b)*(x-b)+f(b)], x=-1..5,
color=[red, blue, green]);
```

Exercice 7 : [énoncé]
On a

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{1/x} = x + 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par suite, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe et la courbe est au dessus de celle-ci.

Exercice 8 : [énoncé]
On a

$$f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln(x)) = \ln 2.x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation $y = \ln 2.x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe et la courbe est en dessous de celle-ci.

Exercice 9 : [énoncé]
On a

$$\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} = x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}} = x+1-\frac{5}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Courbe en dessous (resp. au dessus) de l'asymptote en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 10 : [énoncé]
f est définie et continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} \sim \frac{x\ln x}{x\ln x} = 1,\ f(x)-x = \frac{\ln(x+1)+x\ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1$$

et

$$f(x)-(x+1) = \frac{(x+1)\ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{\ln x} \to 0^+$$

La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe $y = f(x)$ est au dessus.
Quand $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote.
Quand $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote.
Quand $x \to 0$, $f(x) \to 0$, on prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$.

Exercice 11 : [énoncé]
f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Quand $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{2x-1}$$

On a

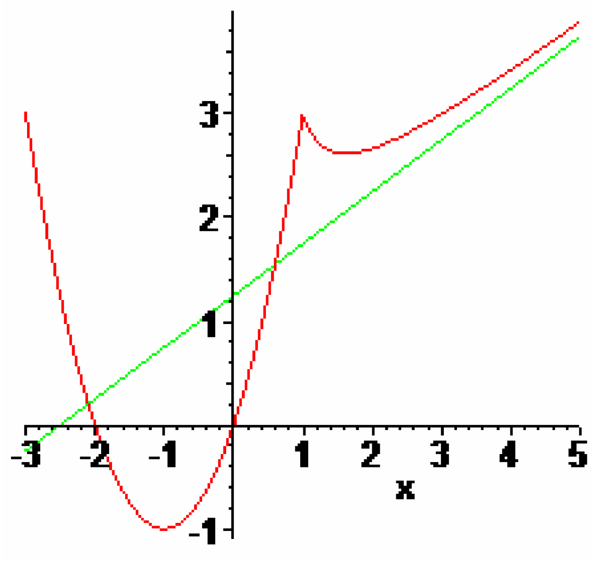
$$\frac{f(x)}{x} \to \frac{1}{2},\ f(x)-\frac{1}{2}x = \frac{5x}{4x-2} \to \frac{5}{4} \text{ et } f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{8x-4} \to 0^+$$

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ est asymptote en $+\infty$ courbe au dessus.
Quand $x \to -\infty$,

$$f(x) = x^2+2x$$

Il y a une branche parabolique verticale.

```
plot([f(x), x/2+5/4], x=-3..5);
```



La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x}$

Exercice 12 : [énoncé]
a) $\mathrm{ch}a = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 a}$ donc $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x) = \sqrt{1+x^2}$.
b) $\mathrm{th}(\mathrm{argsh}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
c) $\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x) = 2\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}x)\mathrm{ch}(\mathrm{argch}x) = 2x\sqrt{1+x^2}$.
d) $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}x) = \sqrt{x^2-1}$.
e) $\mathrm{th}(\mathrm{argch}x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
f) $\mathrm{th}^2 a = 1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}$ donc $\mathrm{ch}(\mathrm{argth}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Pour $x \geqslant 1$, posons $\alpha = \mathrm{argch}x$
On a

$$\mathrm{argch}(2x^2-1) = \arg\mathrm{ch}(2\mathrm{ch}^2\alpha-1) = \mathrm{argch}(\mathrm{ch}2\alpha) = 2\alpha = 2\mathrm{argch}x$$

Par parité , pour $x \in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$,

$$\mathrm{argch}(2x^2-1) = 2\mathrm{argch}\,|x|$$

b) Posons $\alpha = \operatorname{argsh} x$.
On a $2x\sqrt{1+x^2} = 2\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{sh}2\alpha$ donc

$$\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) = 2\alpha = 2\operatorname{argsh} x$$

Exercice 14 : [énoncé]
La fonction $f : x \mapsto \operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x$ est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
$f(1) = \operatorname{argsh}(1)$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Puisque $\operatorname{sh}1 \geqslant 1$, $\operatorname{argsh}(1) \leqslant 1$.
L'équation possède donc une unique solution a. Déterminons-la.

$$\operatorname{sh}(1) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a + \operatorname{argch} a) = a^2 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{a^2-1} = a^2 + \sqrt{a^4-1}$$

donc

$$\sqrt{a^4-1} = \operatorname{sh}(1) - a^2$$

puis

$$a^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 1}{2\operatorname{sh}1}$$

et enfin

$$a = \frac{\operatorname{ch}1}{\sqrt{2\operatorname{sh}1}}$$

Exercice 15 : [énoncé]
G est dérivable par composition et $G'(t) = \sqrt{1+\tan^2 t}$. Or
$\operatorname{ch}G(t) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 G(t)} = \sqrt{1+\tan^2 t}$.

Exercice 16 : [énoncé]
A l'aide d'une intégration par partie :
$a_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n \mathrm{d}t = 2(n+1)(a_n - a_{n+1})$ donc $a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}a_n$.
$a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ donc $R = 1$.
Pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 ((1-t^2)x)^n \mathrm{d}t$.
On peut permuter somme infinie et intégrale (par un argument de convergence uniforme par exemple) et affirmer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-x+xt^2}$.
Pour $x = 0$: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$.
Pour $x > 0$: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1-x}{x}+t^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)$.
Pour $x < 0$: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)$.

Exercice 17 : [énoncé]
On a $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}a_n$. Par application de la règle de d'Alembert, on obtient $R = 2$.
La relation $(2n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$ avec $a_0 = 1$ permet d'affirmer que la somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est solution sur $]-2, 2[$ de l'équation différentielle

$$x(x-2)S'(x) + (x-1)S(x) + 1 = 0$$

La recherche de solution définie et continue en 0 donne

$$S(x) = \frac{\arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x(2-x)}} \text{ pour } x > 0$$

et

$$S(x) = \frac{\arg\operatorname{ch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}} \text{ pour } x < 0$$

Exercice 18 : [énoncé]
Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$.
Posons z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(\operatorname{sh}(t))$. z est deux fois dérivable.
Après calculs : y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation $z'' - 4z = 0$.
On obtient

$$z(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}$$

puis

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2\operatorname{argsh} x} + C_2\mathrm{e}^{-2\operatorname{argsh} x} = C_1(x+\sqrt{1+x^2})^2 + \frac{C_2}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$